El valor de los compañeros de juego

Francisco Sánchez Sánchez

XX Coloquio Mexicano de Economía Matemática y Econometría
Facultad de Economía
Universidad de Guanajuato
Septiembre 7, 2010

Motivación

- Supongamos que una sociedad ha instaurado resolver todos sus juegos cooperativos con un valor ϕ. Esto es, supongamos que para todo conjunto finito de jugadores N y todo juego $v \in G^N$, se utiliza

$$\phi : G^N \to \mathbb{R}^N$$

para pagar al jugador i en v.
- Dado que generalmente se obtiene ganancia por cooperar, ¿Cómo medir la importancia que tienen los otros jugadores para con uno de ellos?.

Motivación

- Supongamos que una sociedad ha instaurado resolver todos sus juegos cooperativos con un valor ϕ. Esto es, supongamos que para todo conjunto finito de jugadores N y todo juego $v \in G^N$, se utiliza

$$\phi : G^N \to \mathbb{R}^N$$

para pagar al jugador i en v.

- Dado que generalmente se obtiene ganancia por cooperar, ¿Cómo medir la importancia que tienen los otros jugadores para con uno de ellos?.

Motivación

Enfoques

- Caracterización axiomática
- *a la* Owen
- Reducción

Motivación

Enfoques

- Caracterización axiomática
- *a la* Owen
- Reducción

Motivación

Enfoques

- Caracterización axiomática
- *a la* Owen
- Reducción

Caracterización axiomática

Se desea medir el valor que para el jugador $k \in N$, tienen los otros jugadores. Esto es, se desea caracterizar las soluciones de la forma

$$\varphi : G^N \times N \rightarrow R^{N \setminus \{k\}}$$

para cada $k \in N$. Vamos a denotar a $\varphi(\cdot, k)$ por $\varphi^k(\cdot)$.

Caracterización axiomática

Axioma

Diremos que φ^k es ϕ_k-eficiente si y sólo si

$$\sum_{i \in N \setminus \{k\}} \varphi_i^k(v) = \phi_k(v) - v(\{k\}).$$

El jugador k obtiene en v: $\phi_k(v)$ si coopera y $v(\{k\})$ si no lo hace. La diferencia es el monto que k obtiene por cooperar. Se desea distribuir ese monto entre los demás jugadores.

Caracterización axiomática

Axioma

Diremos que φ^k es doblemente simétrica si y sólo si

a) $\varphi_i^{\pi(k)}(\pi v) = \varphi_i^k$ *para todo* $\pi : N \rightarrow N$ *biyectiva*

b) $\varphi_{\theta(i)}^k(\theta^* v) = \varphi_i^k(v)$ *para todo* $\theta : N \backslash \{k\} \rightarrow N \backslash \{k\}$ *biyectiva*

y todo $v \in G^N$.

El axioma anterior pide que no debe importar el subindice que se le asigne al jugador k, ni tampoco el que se le asigne a cada jugador $i \in N \backslash \{k\}$.

Caracterización axiomática

-

Axioma
Diremos que φ^k satisface nulidad doble (double dummy axiom) si y sólo si $\varphi_i^k(v) = 0$ para todo i nulo en v y para todo k nulo en v.

- Usualmente los valores satisfacen nulidad, si este es el caso para ϕ, entonces cuando k es nulo en v, él no gana por cooperar. Por otro lado, si i es nulo en v, entonces el no aporta al cooperar, en particular le aporta nada a k.

Caracterización axiomática

- Axioma
  Diremos que φ^k satisface nulidad doble (double dummy axiom) si y sólo si $\varphi_i^k(v) = 0$ para todo i nulo en v y para todo k nulo en v.

  - Usualmente los valores satisfacen nulidad, si este es el caso para ϕ, entonces cuando k es nulo en v, él no gana por cooperar. Por otro lado, si i es nulo en v, entonces el no aporta al cooperar, en particular le aporta nada a k.

Caracterización axiomática

- Axioma
  Diremos que φ^k *satisface nulidad doble (double dummy axiom) si y sólo si* $\varphi_i^k(v) = 0$ *para todo* i *nulo en* v *y para todo* k *nulo en* v*.*

  - Usualmente los valores satisfacen nulidad, si este es el caso para ϕ, entonces cuando k es nulo en v, él no gana por cooperar. Por otro lado, si i es nulo en v, entonces el no aporta al cooperar, en particular le aporta nada a k.

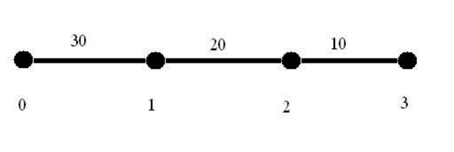
Caracterización axiomática

Teorema

Sea ϕ eficiente. La solución φ^k es lineal, ϕ_k-eficiente, doblemente simétrica y satisface nulidad doble si y sólo si

$$\begin{aligned}\varphi_i^k(v) &= \sum_{T\ni i, T\subseteq N\setminus\{k\}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}(v(T\cup\{k\})-v(T)) \\ &\quad - \sum_{T\subseteq N\setminus\{k,i\}} \frac{t!(n-t-1)!}{n!}(v(T\cup\{k\})-v(T)).\end{aligned}$$

Caracterización axiomática



Ejemplo. Para el problema de drenaje, $v(\{1\}) = 30$, $v(\{2\}) = 50$, $v(\{3\}) = 60$, $v(\{1,2\}) = 50$, $v(\{1,3\}) = 60$, $v(\{2,3\}) = 60$, $v(\{1,2,3\}) = 60$, el siguiente cuadro muestra $\varphi_i^k(v)$:

i	$Sh_i(v)$
1	10
2	20
3	30

Caracterización axiomática

$_i\backslash^k$	1	2	3
1	$-$	-10	-10
2	-10	$-$	-20
3	-10	-20	$-$

A la Owen

- Sea $(N\backslash\{k\}, w^k)$ un juego donde $w^k(S)$ es lo que pierde k cuando los jugadores en S abandonan, es decir,

$$w^k(S) = \phi_k(N, v) - \phi_k(N\backslash S, v_{N\backslash S})$$

- Entonces

$$\eta_i^k(N, v) = \phi_i\left(N\backslash\{k\}, w^k\right)$$

es una medida del daño que i le hace a k cuando i abandona.

A la Owen

- Sea $(N\backslash\{k\}, w^k)$ un juego donde $w^k(S)$ es lo que pierde k cuando los jugadores en S abandonan, es decir,

$$w^k(S) = \phi_k(N, v) - \phi_k(N\backslash S, v_{N\backslash S})$$

- Entonces

$$\eta_i^k(N, v) = \phi_i \left(N\backslash\{k\}, w^k\right)$$

es una medida del daño que i le hace a k cuando i abandona.

A la Owen

Teorema

Si $\phi = Sh$ *entonces* $\varphi^k = \eta^k$.

A la Owen

Example

Si ϕ es la solución igualitaria y v un juego $[0,1]$-normalizado, entonces

$$w^k(S) = \frac{v(N)}{n} - \frac{v(N \backslash S)}{n-s}$$

de donde

$$w^k(N \backslash \{k\}) = \frac{v(N)}{n} - v(\{k\}) = \frac{1}{n}$$

y por lo tanto,

$$\eta_i^k(N,v) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Lo que obtiene k $(\frac{1}{n})$ se divide en $(n-1)$ partes iguales, cada uno de los otros jugadores es responsable de una de ellas.

Reducción (Lehrer)

Para cada coalición $T \subseteq N$ se deriva un juego v_T amalgamando los jugadores de T en uno solo; a este jugador se le llamará T'. El espacio de jugadores para v_T es $N \backslash T \cup \{T'\}$, y se define por:

$$v_T(S) = v(S)$$

$$v_T(S \cup \{T'\}) = v(S \cup T)$$

donde $S \subseteq N \backslash T$.

Axioma

(Reducción.) $\phi_i(v) + \phi_j(v) \leq \phi_{T'}(v_T)$ *para cualquier coalición* $T = \{i, j\}$ *de dos jugadores.*

Reducción (Lehrer)

$$w(T) = Sh_{T'}(v_T) - \sum_{j \in T} Sh_j(v)$$

Consejo de seguridad de la ONU

El Consejo está conformado por 15 naciones, 5 permanentes y 10 temporales. Los cinco miembros permanentes son los Estados Unidos, la República Francesa, el Reino Unido, la República Popular China y la Federación Rusa. Los 10 miembros no permanentes son electos cada dos años como representantes regionales.

Las decisiones en general requieren del voto afirmativo de, al menos, nueve miembros. Sin embargo, los cinco miembros permanentes cuentan con derecho a veto.

Consejo de seguridad de la ONU

- Valor de Shapley

i	$Sh_i(v)$
Permanente	$\frac{421}{2145} = 0{,}1963$
Temporal	$\frac{4}{2145} = 0{,}00187$

-

T	$w(T)$
6 temporales	$\frac{119}{2145} = {,}055$
7 temporales	$\frac{659}{4290} = {,}154$
8 temporales	$\frac{217}{1430} = {,}152$
9 temporales	$\frac{643}{4290} = {,}150$
10 temporales	$\frac{127}{858} = {,}148$
5 p + 4 tmp	$\frac{8}{715} = {,}011$
5 p + 4 tmp	$\frac{4}{429} = {,}009$

Consejo de seguridad de la ONU

- Valor de Shapley

i	$Sh_i(v)$
Permanente	$\frac{421}{2145} = 0{,}1963$
Temporal	$\frac{4}{2145} = 0{,}00187$

-

T	$w(T)$
6 temporales	$\frac{119}{2145} = {,}055$
7 temporales	$\frac{659}{4290} = {,}154$
8 temporales	$\frac{217}{1430} = {,}152$
9 temporales	$\frac{643}{4290} = {,}150$
10 temporales	$\frac{127}{858} = {,}148$
5 p + 4 tmp	$\frac{8}{715} = {,}011$
5 p + 4 tmp	$\frac{4}{429} = {,}009$

Referencias

Owen G. (1977) "Values of games with a priori unions", *Essays in Mathematical Economics and Game Theory*, Springer-Verlag, New York, pp. 76-88.